ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ТОЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА

Хусаинова Галина Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент Уральского государственного архитектурно-художественного университета,
620075 Россия, Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 23.
E-mail:aldisa@mail.ru

Хусаинов Дамир Зиннурович
канд. физ.-мат. наук, доцент Уральского государственного архитектурно-художественного университета,
620075 Россия, Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 23.
E-mail:damiran@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Получено точные решения для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с помощью процедуры, основанной на методе Хироты. Показано, что полученныее решения описывает связанное состояние солитон – антисолитонной пар, образовавшихся в результате резонансного взаимодействия двух солитонов.

Ключевые слова: точное решение, полиномиально-экспоненциальное решение, метод Хироты

THE LOCALIZED RESONANCE EXCITATIONS ARE DESCRIBED BY EXACT SOLUTIONS OF THE MODIFIED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

Khusainova Galina Vladimirovna
Candidate of Science, associate professor of the Ural State University of Architecture and Art, Ekaterinburg
E-mail: aldisa@mail.ru

Khusainov Damir Zinnurovich
Candidate of Science, associate professor of the Ural State University of Architecture and Art, Ekaterinburg
E-mail: damiran@mail.ru

ABSTRACT

The exact soliton solutions of modified Korteweg-de Vries equation are obtained by procedure based on Hirota method. It has shown that these solutions described the bound state of soliton-antisoliton pairs which are formed in result resonance interaction of two solitons.

*Keywords**:** exact solution, rational-exponential solution, Hirota method*

В данной статье мы рассмотрим модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза (МКдФ):

$$v_t + 24v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \quad . \tag{1}$$

где $v = v(x,t)$ является функцией двух переменных x, t (нижний индекс обозначает производную по x и t). Данное уравнение возникает при рассмотрении колебаний атомов одномерной цепочки с кубической ангармоничностью в континуальном пределе [1]. Уравнение МКдФ описывает распространение упругой волны в данной нелинейной одномерной решетке, причем волна может перемещаться как вправо, так и влево.

Известно, что для данного уравнения были построены [2] в явном виде точные солитонные решения, представляемые в виде конечных рядов экспонент, где каждая экспонента зависит от произвольной фазовой постоянной. Начиная с работы Хироты [2], эти фазовые постоянные считались вещественными постоянными, не имели особенностей и не зависели от физических параметров солитона, таких как амплитуда и скорость.

Однако, если считать фазовые постоянные определенными сингулярными функциями параметров солитона, то возникает новый класс решений, так называемые полиномиально-экспоненциальные решения (ПЭ) решения [4] . В статье Poppe [3] было указано на существование такого типа решений, как возможных многополюсных решений в методе обратной задачи рассеяния. Они описывают вырожденные солитоны, которые образуются в результате резонансного взаимодействия пары солитонов, характеризующиеся одинаковыми параметрами (например, амплитудой) [5].

Наиболее значительным и впечатляющим по количеству результатов для нелинейных уравнений, допускающих солитонные решения, является метод Хироты. Подстановка Хироты [2,4]:

$$v = \left(\operatorname{arctg} \frac{g(x,t)}{f(x,t)} \right)_x \tag{2}$$

приводит к билинейным уравнениям:

$$\left(D_t + D_x^3\right) g \cdot f = 0 \qquad (3)$$

$$D_x^2 \left(f \cdot f + g \cdot g\right) = 0 \ . \qquad (4)$$

где D - операторы Хироты определяются следующим образом

$$D_x^n D_t^m f(x,t) g(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m f(x,t) g(x',t')\Bigg|_{\substack{x=x'\\ t=t'}}$$

n=0,1,2…; m=0,1,2….

Для решения системы уравнений (3),(4) и получения солитонных решений Хирота предложил формальную теорию возмущений [2]. В соответствии с ней, надо разложить функции g и f в ряды по степеням параметра ε

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \varepsilon^5 g_5 + ... \qquad (5)$$

$$f = 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + ... \qquad (6)$$

Подставляя (5), (6) в уравнения (3), (4) получаем систему уравнений

$$\left(D_t + D_x^3\right) g_1 = 0 \quad , \qquad (7а)$$

$$D_x^2 \left(2 f_2 + g_1^2\right) = 0 \quad , \qquad (7б)$$

. . . .

Далее полагаем $\varepsilon = 1$.

Отметим следующий факт. Первое уравнение системы (7) – это линейное дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Оно имеет фундаментальную систему решений

$$g_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{\xi_i} \ , \qquad (8)$$

Здесь, $\xi_i = P_i x - P_i^3 \cdot t + \xi_i^0$, P_i, c_i, ξ_i^0 - произвольные ограниченные вещественные постоянные. (i = 1,2,…N).

Известно, что N-солитонные решения уравнения (1) получают путем выбора начальной функции g_1 в виде (8). Подобным образом, можно построить в явном виде новый класс точных решений - вырожденные солитонные решения (ПЭ решения) путем выбора начальной функции g_1 в виде:

$$g_1 = \sum_{i=1}^{N} Q_i \exp(\xi_i), \tag{9}$$

где $Q_i = x - 3P_i^2 t + c_i$, $\xi_i = P_i x - P_i^3 \cdot t + \xi_i^0$, P_i, c_i, ξ_i^0 - произвольные постоянные (i = 1,2,…N).

Обратим внимание на то, что начальные функции g_1 в виде (8) (для построения солитонных решений) и (9) (для построения вырожденных солитонных решений) являются фундаментальными решениями линейного дифференциального уравнения (7а).

Выберем начальную функцию в виде начальную функцию g_1 в виде (N=1)

$$g_1 = Q_1 e^{\xi_1},$$

где $Q_1 = x - 3P_1^2 t + c_1$, $\xi_1 = P_1 x - P_1^3 \cdot t + \xi_1^0$, P_1, c_1, ξ_1^0- произвольные постоянные. Отметим, что при получении простейшего односолитонного решения эту функцию обычно выбирают в виде экспоненты, мы же берем в виде полинома, умноженного на экспоненту. После решения системы (7), с учетом (2) найдем простейшее ПЭ решение уравнения МКдФ:

$$v = \left\{ \operatorname{arctg} \frac{Q_1 e^{\xi_1}}{1 + \dfrac{e^{2\xi_1}}{4P_1^2}} \right\}_x ,$$

или

$$v(x,t) = \frac{\left(P_1 Q_1 + 1\right) \cdot 2\operatorname{ch}\left(\xi_1 - \alpha\right) - Q_1 e^{\xi_1}}{Q_1^2 e^{\alpha} + e^{-\alpha} \cdot 2\operatorname{ch}^2\left(\xi_1 - \alpha\right)} \tag{10}$$

$\left(\alpha = \ln 2P_1\right)$.

На Рис.1 дана эволюция данного решения со временем. Из рисунка видно, что в начальный момент времени вырожденный солитон представляет собой локализованный импульс, который описывает сложное взаимодействие солитона и антисолитона. При $t > 0$ взаимодействие ослабевает, и ,в результате, мы наблюдаем слабосвязанную солитон – антисолитонную пару, движущуюся практически без изменения формы в виде локализованного возбуждения.

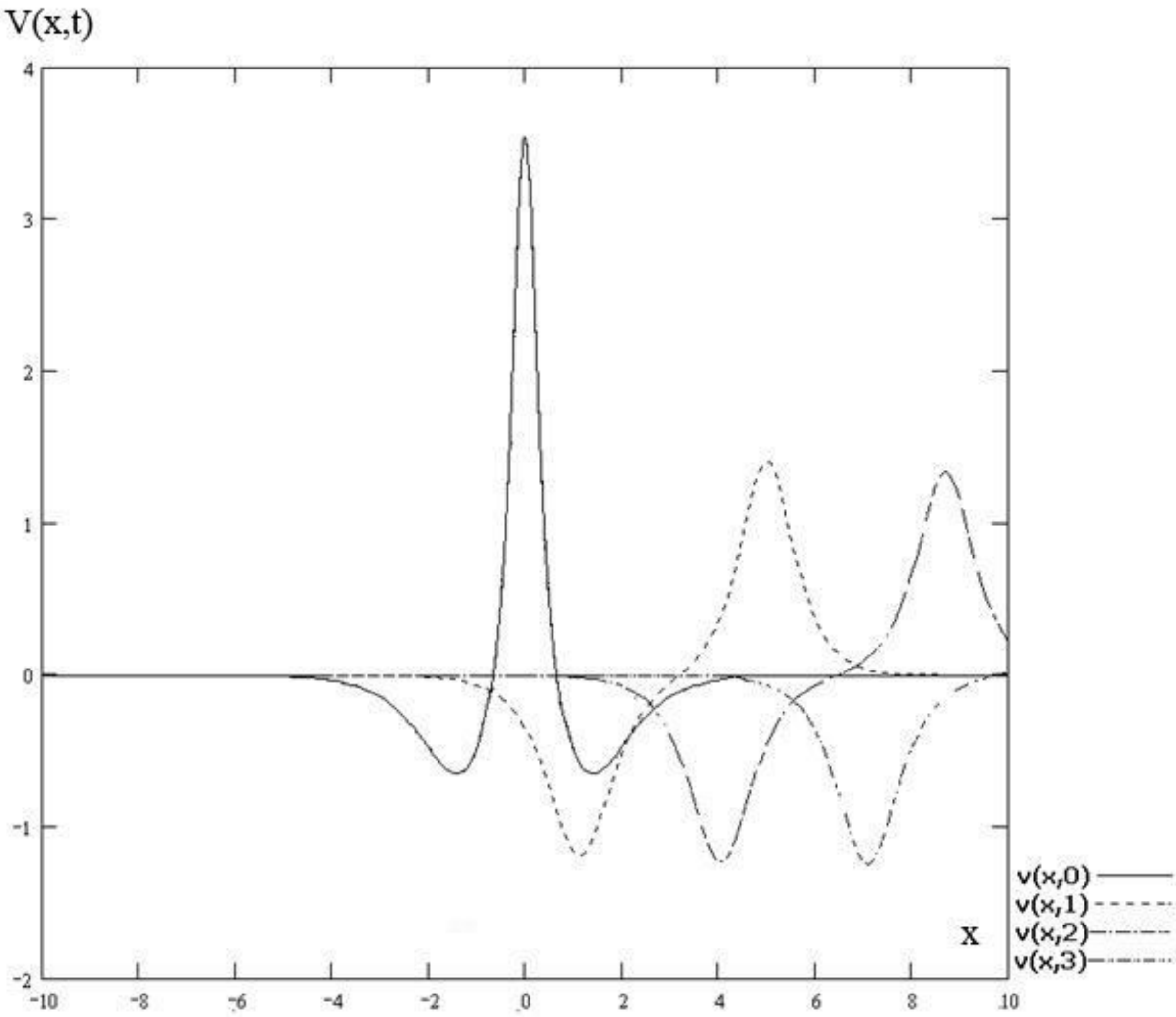

Рис.1

Решение $v(x,t)$ в соответствии с формулой (10) при $t = 0,1,2,3$ и $P_1 = 2$.

При выборе начальной функции g_1 в формуле (9) при N=2

$$g_1 = Q_1 e^{\xi_1} + Q_2 e^{\xi_2},$$

и решения системы (7), получаем более сложные функции

$$g(x,t)=Q_1 e^{\xi_1}+Q_2 e^{\xi_2}+e^{2\xi_1+\xi_2}\left\{\frac{a^2(1,2)}{4}Q_2+\frac{a(1,2)\,\alpha(2,1)}{2}\right\}+$$
$$+e^{2\xi_2+\xi_1}\left\{\frac{a^2(1,2)}{4}Q_1+\frac{a(1,2)\,\alpha(1,2)}{2}\right\}\quad, \tag{11}$$

$$f(x,t)=1+\frac{e^{2\xi_1}}{4P_1^2}+\frac{e^{2\xi_2}}{4P_2^2}+\{a(1,2)Q_1Q_2+\alpha(1,2)Q_1+\alpha(2,1)Q_2+\alpha_0(1,2)\}e^{\xi_1+\xi_2}+$$
$$+\frac{a^4(1,2)}{16P_1^2P_2^2}e^{2(\xi_1+\xi_2)}\quad, \tag{12}$$

где коэффициенты определяются следующим образом

$$a(1,2)=-\frac{(P_1-P_2)^2}{(P_1+P_2)^2}\,,\qquad \alpha(1,2)=\frac{4P_1(P_1-P_2)}{(P_1+P_2)^3}\,,$$
$$\alpha(2,1)=\frac{4P_2(P_2-P_1)}{(P_1+P_2)^3}$$
$$\alpha_0(1,2)=-\frac{4(P_1-P_2)^2}{(P_1+P_2)^4}+\frac{8P_1P_2}{(P_1+P_2)^4}\quad.$$

На Рис. 2 приведена эволюция данного решения со временем. Из рисунка видно, что в начальный момент времени мы наблюдаем локализованный импульс, который возникает в результате сложного взаимодействия двух резонансных возбуждений, каждый из которых представляет собой слабосвязанную пару: солитон-антисолитон. При $t > 0$ импульс начинает распадаться, связь между двумя локализованными возбуждениями слабеет. В результате при больших t две солитон-антисолитонные пары движутся в одном направлении, каждая со своей скоростью независимо друг от друга без явного изменения формы возбуждений.

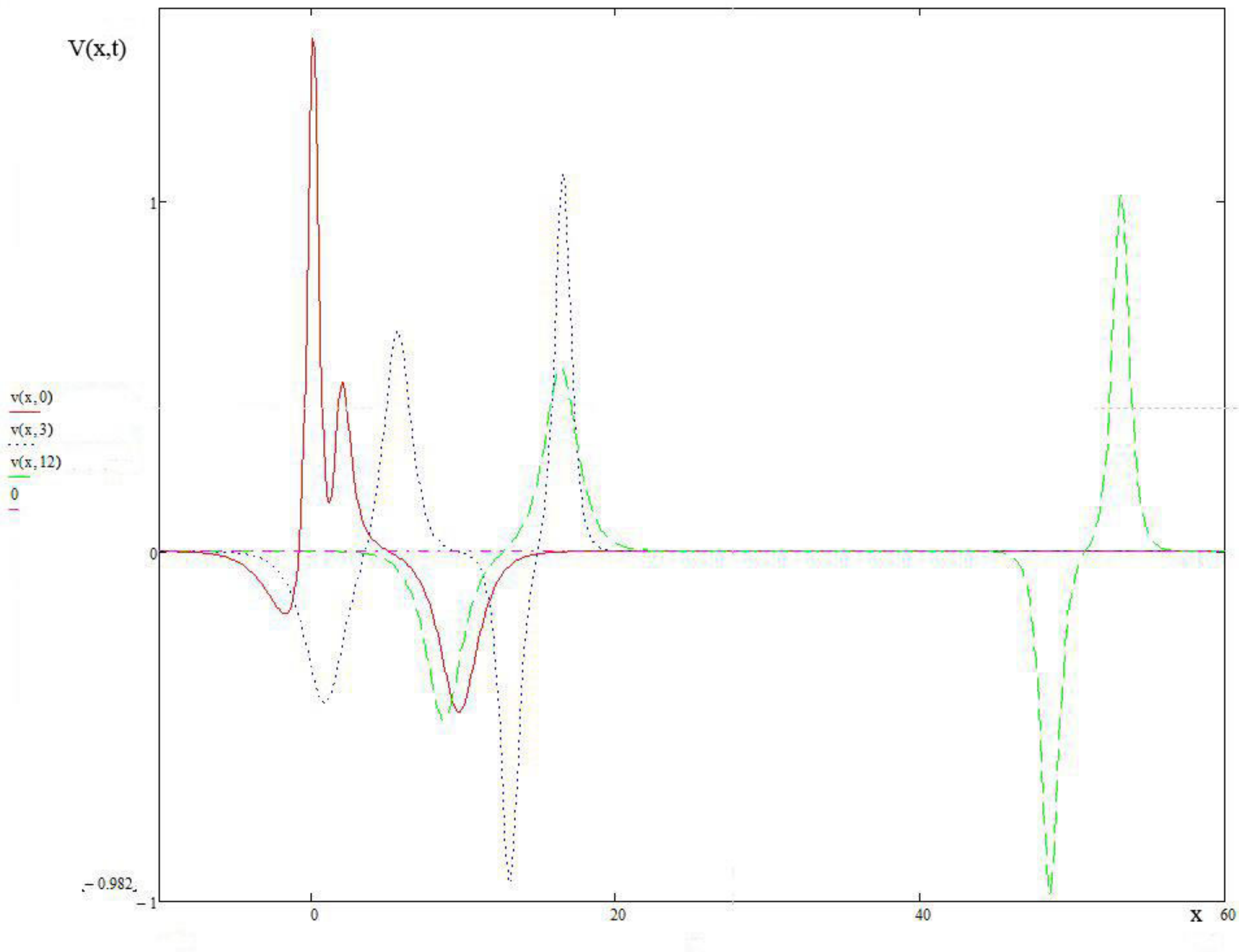

Рис.2

Решение $v(x,t)$ в соответствии с формулами (2), (11), (12) при $t = 0,3,12$ и $P_1 = 2$, $P_2 = 1$.

Список литературы.

1. Солитоны //Под ред. Р.Буллофа, Ф.Кодри. – М: Мир, 1983 – 408с.
2. Hirota R. Exact Solution of the Modified Korteweg – de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons// J.Phys. Soc.Japan –1972– Vol.33, № 5– P.1456 – 1458.
3. Poppe C. Construction of solutions of the sine – Gordon equation by means of Fredholm determinants//Physica D –1983 –Vol.9 –P.103 – 139.
4. Hirota R., Satsuma J. A Variety of Nonlinear Network Equations Generated from the Backlund Transformation for the Toda lattice. Suppl. of Progress of Theoretical Physics, 1976, № 59, p.64 – 100.

5. Хусаинова Г.В., Хусаинов Д.З. Вырожденное солитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили как предельный случай двухсолитонного решения//В сборнике: Наука в современном информационном обществе Материалы IX международной научно-практической конференции. н.-и. ц. «Академический». 2016. С. 143-145.