ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Баширзаде Л.И., Алиев Г.С.
Западно-Каспийский Университет, Азербайджанская Республика

Аннотация. Оптимизационные задачи встречаются почти во всех отраслях науки, техники и хозяйства. В современной теории управления широко используются оптимизационные методы, которые составляют основу математического программирования, делает данную тему актуальной. В статье приведены результаты исследования данной проблемы и применения методов динамического программировании в области управления предприятий. В частности, показана общая постановка задачи математического программирования и оптимальная стратегия замены оборудования, которая является одной из важных экономических проблем для определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые.

Ключевые слова: динамическое программирование, математическое программирование, функциональные уравнения, оптимальная стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих задач оптимизации, включающих большое число переменных и ограничений в виде неравенства, классический аппарат математики оказался непригодным. И в результате пришла идея разбивать задачу большой размерности на подзадачи, включающих всего по несколько переменных, и последующего решения общей задачи по частям. Именно эта идея стала основой при создании метода динамического программирования.

Оптимизационные задачи встречаются почти во всех отраслях науки, техники и хозяйства. С ними приходится иметь дело в промышленной технологии, в организации производства, в экономическом планировании, в различных вопросах физики, биологии и военного дела. Поэтому круг применения динамического программирования широк.

Актуальность данной темы состоит в том, что в современной экономике широко используются оптимизационные методы, которые составляют основу математического программирования.

Предмет динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, который подходит к решению некоторого класса задач путем их разложения на части, небольшие и менее сложные задачи. При этом отличительной особенностью является решение задач по этапам, через фиксированные интервалы, промежутки времени, что и определило появление термина динамическое программирование. Планирование каждого шага должно проводиться с учетом общей выгоды, получаемой по завершении всего процесса, что и позволяет оптимизировать конечный результат по выбранному критерию.

Таким образом, динамическое программирование в широком смысле представляет собой оптимальное управление процессом, посредством изменения управляемых параметров на каждом шаге, и, следовательно, воздействуя на ход процесса, изменяя на каждом шаге состояние системы.

Динамическое программирование является одним из разделов оптимального программирования. Методами динамического программирования решаются вариантные оптимизационные задачи с заданными критериями оптимальности, с определенными связями между переменными и целевой функцией, выраженными системой уравнений или неравенств. Динамическое программирование можно использовать как для решения задач, связанных с динамикой процесса или системы, так и для статических задач, связанных, например, с распределением ресурсов. Это значительно расширяет область применения динамического программирования для решения задач управления. А возможность упрощения процесса решения, которая достигается за счет ограничения области и количества, исследуемых при переходе к очередному этапу вариантов, увеличивает достоинства этого комплекса методов.

Вместе с тем динамическому программированию свойственны и недостатки. Прежде всего, в нем нет единого универсального метода решения. Практически каждая задача, решаемая этим методом, характеризуется своими особенностями и требует проведения поиска наиболее приемлемой совокупности методов для ее решения. Кроме того, большие объемы и трудоемкость решения многошаговых задач, имеющих множество состояний, приводят к необходимости отбора задач малой размерности либо использования сжатой информации.

Метод динамического программирования и его основные этапы

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р. Э. Беллманом: каково бы ни было состояние системы (S) в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге. При решении задачи на каждом шаге выбирается управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми, тогда оптимальным управлением будет то управление, которое обеспечит максимальный выигрыш именно на данном шаге [1].

Метод динамического программирования включает три основных этапа:

Предварительный этап.

Этап условной оптимизации.

Этап безусловной оптимизации.

Предварительный этап проводится с целью уменьшения вычислительной работы на последующем этапе решения и, по существу, заключается в нахождении всех допустимых значение управлений u_i и фазовых переменных x_i. Иными словами, на данном этапе отбрасываются все заведомо неподходящие, нереализуемые значения фазовых и управляющих переменных. Проводится предварительный этап в естественном порядке от первого шага к последнему: i = 1, 2, … , N, а опираются соответствующие расчеты на уровне процесса $x_i = f_i(x_{i-1}, u_i)$.

Этап условной оптимизации. На данном этапе решения задачи, называемом условной оптимизацией, определяются функция Беллмана и оптимальные управления для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего в соответствии с алгоритмом обратной прогонки. На последнем, n-м шаге, оптимальное управление - x_n^* определяется функцией Беллмана (1.1):

$$F(S) = max\{W_n(S, x_n)\}, \tag{1}$$

в соответствии с которой максимум выбирается из всех возможных значений x_n, причем $x_n \in X$.

Дальнейшие вычисления производятся согласно рекуррентному соотношению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с этой же функцией, но вычисленной на предыдущем шаге. В общем виде это уравнение имеет вид:

$$F_n(S) = max\{W_n(S, x_n) + F_{k+1}(S^1(S, x_k))\}, x_k \in X. \tag{2}$$

Этот максимум (или минимум) определяется по всем возможным для k и S значениям переменной управления X.

Безусловная оптимизация. После того, как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов с n-го по первый, осуществляется третий этап решения задачи, называемый безусловной оптимизацией. Пользуясь тем, что на первом шаге (k = 1) состояние системы известно - это ее начальное состояние S_0, можно найти оптимальный результат за все n шагов и оптимальное управление на первом шаге $x_1,$ которое этот результат доставляет. После применения этого управления система перейдет в другое состояние $S^1(S, x_1^*)$, зная которое, можно, пользуясь результатами условной оптимизации, найти оптимальное управление на втором шаге x_2^*, и так далее до последнего n-го шага. Вычислительную схему динамического программирования можно строить на сетевых моделях, а также по алгоритмам прямой прогонки (от начала) и обратной прогонки (от конца к началу). [2-4]

Порядок расчетов в методе динамического программирования может быть проиллюстрирован схемой, в которой точками обозначены состояния системы.

Общая постановка задачи математического программирования

Имеется некоторая физическая система (S), которая с течением времени меняет свое состояние, т.е. в системе S происходит какой-то процесс. Мы можем управлять этим процессом, т.е. тем или иным способом влиять на состояние системы. Такая система (S) - управляемая, а способ воздействия на нее - управление (U - не какая-то одна величина, а целая совокупность величин, векторов или функций, характеризующих управление).

Предположим, что с процессом связана какая-то наша заинтересованность, выражающая численно величиной W, которую мы будем называть «выигрышем». Мы хотим управлять процессом таким образом, чтобы выигрыш был максимален.

Выигрыш зависит от уравнения:

$$W = W(U). \tag{3}$$

Мы хотим найти такое уравнение (оптимальное):

$$U = u, \tag{4}$$

при котором выигрыш максимален [2]:

$$W_{max} = max_U\{W(U)\}. \tag{5}$$

Запись max_U читается «максимум по U» и означает: «максимальное из всех значений W(U) при всех возможных управления U». То из управлений, при котором достигается этот максимум, и есть оптимальное уравнение u.

Таким образом, поставлена общая задача оптимизации управления физической системой. Однако она поставлена еще не полностью. Обычно в таких задачах должны быть учтены некоторые условия, накладываемые на начальное состояние системы S_0 и конечное состояние S_ω.

Общая задача оптимального управления формулируется следующим образом:

Из множества возможных управлений U найти такое оптимальное управление u, которое переводит физическую систему S из начального состояния S_0 в конечное состояние S_ω так, чтобы при этом W обращалось в максимум [5-6].

Оптимальная стратегия замены оборудования

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые.

Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость.

Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат; причем его можно заменить новым оборудованием того же вида или новым, более совершенным.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения: (t) - стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;(t) - ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;(t) - остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

Р - покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.

Обозначим через f(N(t)) максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, t = 0 соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, N = 1 относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а N = N - к началу процесса (рис. 1.1).

На каждом этапе N-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

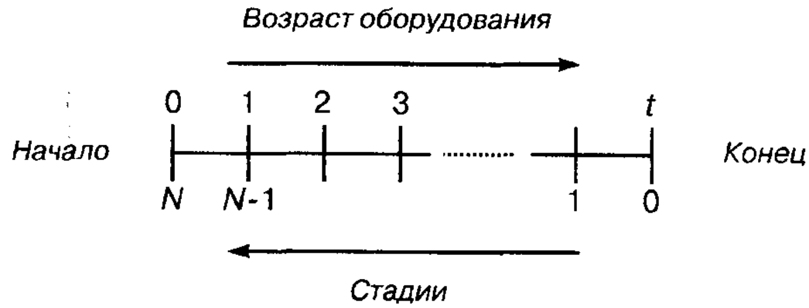

Рисунок 1. Стадии решения задачи.

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$f_N(t) = max\begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) \to \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \to \text{Замена,} \end{cases} \tag{6}$$

$$f_1(t) = max\begin{cases} r(t) - u(t) \to \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \to \text{Замена.} \end{cases} \tag{7}$$

Уравнение (6) описывает N-стадийный процесс, а (7) - одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя - доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В уравнении (6) функция r(t) - u(t) есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на N-й стадии процесса.

Функция $f_{N-1}(t + 1)$ характеризует суммарную прибыль от (N - 1) оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет (t + 1) лет.

Нижняя строка (6) характеризуется следующим образом: функция s(t) - P представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет.

Функция r(0) выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию.

Последняя функция f_{N-1} в (6) представляет собой доход от оставшихся N-1 стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одностадийного процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t + 1)$, так как N принимает значение 1, 2, ... , N. Равенство $f_0(t) = 0$ следует из определения функции f(N(t)).

Уравнения (6) и (7) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину f(N(t)) в зависимости от $f_{N-1}(t + 1)$. Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до (t + 1) лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до (N-1).

Расчет начинают с использования уравнения (6). Уравнения (6) и (7) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования, с тем чтобы принять тот из них, который предполагает больший доход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений. [6-7]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены общие характеристики задач дискретного программирования, приведено общее описание процесса моделирования, метода динамического программирования, решена проблема предприятия, связанная с минимизацией расходов по закупке строительных материалов, а также решена проблема распределения инвестиций между предприятиями, которое максимизирует прирост годовой прибыли на всех предприятиях.

Для построения модели выбраны следующие задачи: задача оптимального распределения ресурсов; задача оптимальной замены оборудования.

Литература

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллан; под редакцией Н.Н. Воробьева - Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. - 549 с.
2. Лежнев А.В. Динамическое программирование в экономических задачах: учеб. пособие / Лежнев А.В. - Москва: Бином, 2010. - 176 с.
3. Динамическая задача определения оптимальной производственной программы / А.В. Мищенко, Е.В. Джамай // Менеджмент в России и за рубежом - 2009 - №4 - С.55-59.
4. Красс М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом анализе: учеб. пособие/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов - 3-е издание - Москва: Дело, 2002. - 500 с.
5. Косоруков, О.А. Исследование операций / О.А. Косоруков, А.В. Мищенко; под ред. Н.П. Тихомирова - Москва: Экзамен, 2003. - 599 с.
6. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен [и др.]; под ред. Красикова И.В. -2-е изд. - Москва: Вильямс, 2005. - 1296 с.
7. Элементы динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации / А. А. Ченцов [и др.] // Проблемы управления - 2013 - №2 - С.11-18.