ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В МОДЕЛИ СИНУС-ГОРДОН.

Хусаинова Галина Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент Уральского государственного архитектурно-художественного университета ,
620075 Россия, Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 23.
E-mail: aldisa@mail.ru

Хусаинов Дамир Зиннурович
канд. физ.-мат. наук, доцент Уральского государственного архитектурно-художественного университета,
620075 Россия, Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 23.
E-mail: damiran@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Получено точное решение (“смешанного” типа) для уравнения синус-Гордон с помощью процедуры, основанной на методе Хироты. Показано, что полученное решение описывает связанное состояние вырожденного (резонансного) солитона и обычного солитона (кинка).

Ключевые слова: точное решение, полиномиально-экспоненциальное решение, солитон.

THE EXACT SOLUTIONS OF THE “MIXED” TYPE FOR SINE-GORDON MODEL

Khusainova Galina Vladimirovna
Candidate of Science, associate professor of the Ural State University of Architecture and Art, Ekaterinburg
E-mail: aldisa@mail.ru

Khusainov Damir Zinnurovich
Candidate of Science, associate professor of the Ural State University of Architecture and Art, Ekaterinburg
E-mail: damiran@mail.ru

ABSTRACT

The exact soliton solution ("mixed" type) of sine-Gordon equation is obtained by procedure based on Hirota method. It has shown that this solution is described the bound state of degenerate (resonance) soliton and kink.

Keywords: exact solution, kink, rational-exponential solution, soliton

Рассмотрим одно из классических уравнений математической физики - уравнение sin-Гордон (СГ):

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)u = \sin u\,, \tag{1}$$

(символ ∂_x обозначает частную производную относительно x).

Уравнение (1) встречается во многих областях физики: в нелинейной оптике, в физике магнетизма, в теории сверхпроводимости, как модель для описания дислокаций в кристаллах, в теории поля [1]. Кроме того, уравнение СГ имеет многосолитонные решения [2], представляемые в виде стандартных конечных рядов экспонент, где каждая экспонента зависит от произвольной фазовой постоянной. Начиная с работы Хироты [3] и работ многих других авторов [4], эти фазовые постоянные считались вещественными постоянными, не имели особенностей и не зависели от физических параметров солитона, таких как амплитуда и скорость.

Однако, если считать фазовые постоянные определенными сингулярными функциями параметров солитона, то возникает новый класс решений, так называемые полиномиально-экспоненциальные (ПЭ) решения [5].

В статье [6] было указано на существование такого типа солитонов, как возможных многополюсных решений в методе обратной задачи рассеяния. Данные решения описывают вырожденные солитоны, которые образуются в результате резонансного взаимодействия пары солитонов, имеющих одинаковые параметры (например, амплитуду и скорость).

С помощью подстановки Хироты [3]:

$$u(x,t) = 4\arctan\frac{g(x,t)}{f(x,t)} \quad , \tag{2}$$

исходное уравнение (1) сводится к двум билинейным уравнениям:

$$\left(D_x^2 - D_t^2\right) g\cdot f = g\cdot f \tag{3}$$

$$\left(D_x^2 - D_t^2\right)\left(g\cdot g - f\cdot f\right) = 0, \tag{4}$$

где действие D-операторов Хироты на функции g и f определено следующим образом

$$D_x^n D_t^m f(x,t) g(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m f(x,t) g(x',t')\bigg|_{\substack{x=x' \\ t=t'}} \qquad (5)$$

(n=0,1,2…; m=0,1,2…) и g=g(x,t), f=f(x,t) .

Для решения этой системы и получения солитонных решений Хирота предложил формальную теорию возмущений [3]. Необходимо разложить функции g(x,t) и f(x,t) в ряды по параметру ε (после вычисления полагают $\varepsilon = 1$) :

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \varepsilon^5 g_5 + ... \qquad (6)$$

$$f = 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + ... \qquad (7)$$

Подставляя разложения (6), (7) в уравнения (3) и (4), и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим следующую бесконечную систему уравнений:

$$\left(D_x^2 - D_t^2\right) g_1 = g_1 \ , \qquad (8а)$$

$$\left(D_x^2 - D_t^2\right)\left(g_1^2 - 2f_2\right) = 0 \ , \qquad (8б)$$

. . . .

Отметим следующий факт. Первое уравнение системы (8) – это линейное дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Оно имеет фундаментальную систему решений

$$g_1 = \sum_{i=1}^{M} \exp(\eta_i), \qquad (9)$$

Здесь $\eta_i = P_i x - \Omega_i t + \eta_i^0$, $P_i^2 - \Omega_i^2 = 1$, и P_i, Ω_i, η_i^0- произвольные ограниченные вещественные постоянные. Известно, что N-солитонные решения [3] уравнения (1) получают путем выбора начальной функции g_1 в виде (9). Подобным образом, можно построить в явном виде новый класс решений- вырожденные солитонные решения (ПЭ решения) [5] путем выбора начальной функции g_1 в виде:

$$g_1 = \sum_{i=1}^{N} Q_i \exp(\eta_i), \tag{10}$$

где $Q_i = \Omega_i x - P_i t + \eta_i^0$, $\eta_i = P_i x - \Omega_i t + \eta_i^0$, $P_i^2 - \Omega_i^2 = 1$, P_i, Ω_i, η_i^0 - произвольные постоянные $(i = 1,2,..N)$. Однако, такой выбор начального решения не охватывает полностью весь класс ПЭ решений. Чтобы понять это, мы рассмотрим более сложный тип ПЭ решений и укажем возможную процедуру их построения. Обратим внимание на то, что начальные функции g_1 в виде (9) (для построения солитонных решений) и (10) (для построения вырожденных солитонных решений) являются фундаментальными решениями линейного дифффеpенциального уравнения (8а). Однако, можно указать целый ряд функций, которые также будут удовлетворять первому уравнению системы (8). Действительно, если мы выберем начальную функцию в виде:

$$g_1 = \sum_{i=1}^{l} Q_i \exp(\eta_i) + \sum_{k=l+1}^{N} \exp(\eta_k), \tag{11}$$

то эта функция также будет удовлетворять уравнению (8а). Отметим, что начальная функция представляет собой сумму двух функций: первая выбирается при построении солитонных решений, а вторая позволяет строить вырожденные солитонные решения. Такой выбор позволяет найти решения смешанного типа, которые описывают взаимодействие солитонов и вырожденных солитонов.

Рассмотрим частный случай l=1 и N=2:

$$g_1 = Q_1 \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) . \tag{12}$$

Подставим (12) в систему (8) и решим её. В результате получим

$$g(x,t) = Q_1 \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + \frac{a(1,2)^2}{4} \exp(2\eta_1 + \eta_2) \ , \tag{13}$$

$$f(x,t) = 1 + \frac{1}{4} \exp(2\eta_1) + \exp(\eta_1 + \eta_2)\{a(1,2) Q_1 + \alpha(1,2)\} \ . \tag{14}$$

Здесь $Q_i = \Omega_i x - P_i t + \eta_i^0$, $\eta_i = P_i x - \Omega_i t + \eta_i^0$, $P_i^2 - \Omega_i^2 = 1$, P_i, Ω_i, η_i^0 - произвольные постоянные $(i = 1,2)$ и

$$a(1,2) = \frac{(P_1 - P_2)^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2}{(P_1 + P_2)^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2} \quad , \quad \alpha(1,2) = \frac{8(\Omega_2 P_1 - \Omega_1 P_2)}{((P_1 + P_2)^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2)^2}.$$

Полученное нами решение уравнения СГ (см. формулы (2), (12), (13)) показано на Рис.1. Видно, что данное решение описывает взаимодействие вырожденного солитона, который образовался в результате резонансного взаимодействия двух солитонов (двух связанных 2π кинков) и обычного солитона (2π кинка).

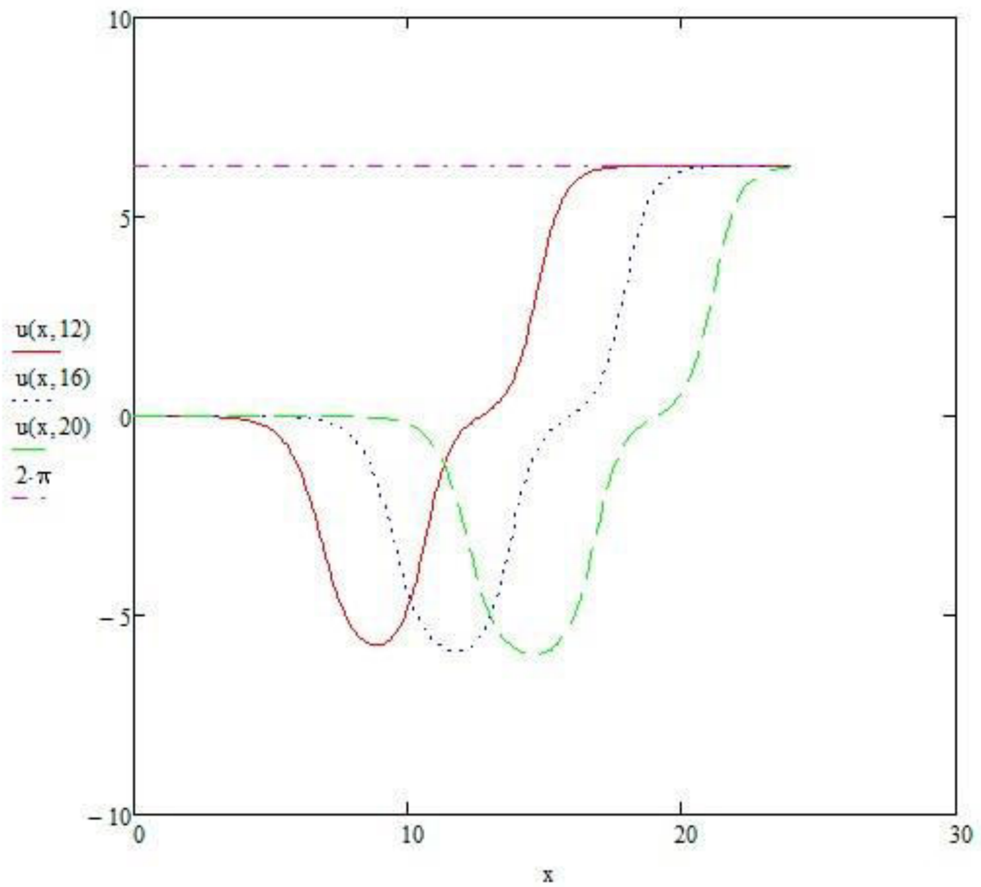

Рис.1

Решение $u(x,t)$ *в соответствии с формулами (2), (13), (14) для* $P_1^2 = 2, \Omega_1^2 = 1$, $P_2^2 = 3, \Omega_2^2 = 2$ *при t=12, 16, 20.*

В заключение, отметим, что данная техника может быть использована для получения более сложных ПЭ решений (при $l > 1$ и $N > 1$ в выражении (11) для начальной функции). Данная процедура получения ПЭ решений применима и для других нелинейных интегрируемых уравнений, например, для уравнения Кортевега-де Фриза, уравнения Кадомцева-Петвиашвили и т.д.

Список литературы.

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.- М.,Мир, 1987–478с.
2. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. – Киев: Наук. Думка, 1983 –192с.
3. Hirota R. Exact solution of the Sin-Gordon equation for multiple collisions of solitons//J.Phys.Soc.Jap. –1972–Vol.33, №5–P.1459–1464.
4. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. –М.,Мир, 1989–326с.
5. Bezmaternih G.V. (Khusainova G.V.), Borisov A.B. Rational – Exponential Solutions of Nonlinear Equations// Lett.Math.Physics–1989 –Vol.18– P.1 – 8.
6. Poppe C. Construction of solutions of the sine – Gordon equation by means of Fredholm determinants//Physica D –1983 –Vol.9 –P.103 – 139.